Exercice 4 — 6 points

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30\ ;\ -29\ ;\ -28\ ;\ \dots -1\ ;\ 1\ ;\ \dots\ ;\ 28\ ;\ 29\ ;\ 30\}$. Il comporte 60 éléments.
On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c.

1. Combien de couples $(a\ ;\ c)$ différents peut-on ainsi obtenir ?

On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2 + 2x + c = 0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2. Montrer que l'évènement M a lieu si et seulement si $ac < 1$.
3. Expliquer pourquoi l'évènement contraire $\overline{M}$ comporte 1 740 issues.
4. Quelle est la probabilité de l'évènement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E):\quad y' + 10y = \left(30x^2 + 22x - 8\right)\mathrm{e}^{-5x+1} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 10y = 0$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2)\mathrm{e}^{-5x+1}.$$

   On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Justifier que f est une solution particulière de (E).
3. Donner l'expression de toutes les solutions de (E).

Partie C : étude de fonction

On propose d'étudier dans cette partie la fonction f rencontrée à la partie B question 2.
On rappelle que, pour tout réel x, $f(x) = \left(6x^2 + 2x - 2\right)\mathrm{e}^{-5x+1}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$
2. En utilisant la partie A, montrer que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonnées de ces points ne sont pas attendues).
3. En utilisant les parties A et B, montrer que $\mathcal{C}_f$ possède deux tangentes horizontales.
4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.
5. Déterminer en justifiant le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 1$.

6. Pour tout réel m strictement supérieur à $0,2$, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right)\mathrm{e}^{-5x+1}$$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $I_m = 0$?

Interpréter graphiquement ce résultat.